Groupe A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

AVERTISSEMENT : *La clarté et la précision des démonstrations seront un élément d'appréciation de la copie. Les parties* I, II et III *sont de difficulté croissante. Il est recommandé de n'aborder la partie* III *qu'après avoir résolu les questions précédentes.*

Dans ce problème, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes, $\mathbb{R}$ le sous-corps formé par les nombres complexes de partie imaginaire nulle, et n un entier > 0 fixé. On considère $\mathbb{C}^n$ soit comme un espace vectoriel complexe, soit comme un espace vectoriel réel (de dimension $2n$); en particulier il y a donc lieu de distinguer entre sous-espaces vectoriels complexes de $\mathbb{C}^n$ et sous-espaces vectoriels réels.

On désigne par $\mathbf{U}(n)$ le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ qui laissent invariant le produit scalaire hermitien :

$$(z \mid z') = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot \bar{z}_i' \quad (z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ z' = (z'_1, \ldots, z'_n) \in \mathbb{C}^n),$$

et on définit sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}^n$ deux formes bilinéaires R et I (à valeurs réelles) par la formule :

$$(z \mid z') = \mathrm{R}(z, z') + i.\mathrm{I}(z, z') \qquad (z \in \mathbb{C}^n,\ z' \in \mathbb{C}^n).$$

Enfin on désigne par Λ l'ensemble des sous-espaces vectoriels réels de $\mathbb{C}^n$ qui sont de la forme $u(\mathbb{R}^n)$ pour au moins un élément $u \in \mathbf{U}(n)$, et pour tout $\mathrm{M} \in \Lambda$ on désigne par $\mathrm{U_M}$ l'ensemble des éléments $\mathrm{L} \in \Lambda$ tels que $\mathrm{L} \cap \mathrm{M} = \{0\}$.

PRÉLIMINAIRES

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et soit Q une forme quadratique sur E. Si B est une base orthogonale de E pour Q, et p (resp. q) le nombre de vecteurs de B en lesquels Q prend une valeur strictement positive (resp. strictement négative), on rappelle (théorème d'inertie)

que les entiers p et q ne dépendent pas du choix de B. La signature s (Q) de Q est par définition l'entier $p - q$.

1° On suppose E de dimension paire $2m$, Q non dégénérée et nulle sur un sous-espace vectoriel V de dimension m. Que vaut s (Q)?

2° La dimension de E étant maintenant quelconque, et Q non dégénérée, soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit F^0 le sous-espace orthogonal de F pour la forme bilinéaire symétrique associée à Q. Exprimer s (Q) à l'aide des signatures s (Q | F) et s (Q | F^0) des restrictions de Q aux sous-espaces vectoriels F et F^0. (On pourra introduire deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 respectivement supplémentaires de $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^0$ dans F et dans F^0 et étudier la restriction de Q à l'orthogonal de $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$).

I

1° Si $\mathrm{L} \in \Lambda$, quelle est la dimension de L, et quelle est la restriction de I à L? Inversement, les propriétés trouvées caractérisent-elles parmi les sous-espaces vectoriels réels de $\mathbb{C}^n$ ceux qui appartiennent à Λ ?

2° Soient L et M deux éléments de Λ tels que $\mathrm{L} \in \mathrm{U_M}$. Montrer que pour tout $\mathrm{F} \in \mathrm{U_M}$ il existe une application linéaire f de L dans M unique telle que F soit égal à l'ensemble des vecteurs $z + f(z)$ quand z parcourt L.

3° L, M, F et f étant comme en 2°, on définit sur L une forme bilinéaire B (L, M, F) par la formule :

$$\mathrm{B}(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{F})(z, z') = \mathrm{I}(f(z), z'), \qquad (z \in \mathrm{L},\ z' \in \mathrm{L}).$$

Montrer que l'application $\mathrm{F} \longmapsto \mathrm{B}(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{F})$ est une bijection de $\mathrm{U_M}$ sur l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur L.

4° Soient L_1, M_1 et M_2 trois éléments de Λ tels que $\mathrm{L}_1 \in \mathrm{U_{M_1}} \cap \mathrm{U_{M_2}}$. A tout élément $\mathrm{L} \in \mathrm{U_{M_1}} \cap \mathrm{U_{M_2}}$ on associe la forme bilinéaire symétrique $\mathrm{B_L}$ définie sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}^n$ par la formule :

$$\mathrm{B_L}(z, z') = \mathrm{B}(\mathrm{L}_1, \mathrm{M}_1, \mathrm{L})(u, u') - \mathrm{B}(\mathrm{M}_1, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_2)(v, v') + \mathrm{I}(u, v') - \mathrm{I}(v, u')$$
$$(u \in \mathrm{L}_1,\ u' \in \mathrm{L}_1,\ v \in \mathrm{M}_1,\ v' \in \mathrm{M}_1,\ z = u + v,\ z' = u' + v').$$

Quel est le noyau de $\mathrm{B_L}$? Quel est l'orthogonal de M_1 pour $\mathrm{B_L}$?

Montrer qu'il existe un isomorphisme φ qu'on précisera, de M_2 sur M_1, tel que quels que soient les vecteurs z et z' de M_2 :

$$\mathrm{B_L}(z, z') = \mathrm{B}(\mathrm{M}_1, \mathrm{L}, \mathrm{M}_2)(\varphi(z), \varphi(z')).$$

5° Exprimer la signature de la forme quadratique associée à $\mathrm{B_L}$ à l'aide des signatures des formes quadratiques associées à B (M_1, L_1, M_2) et B (M_1, L, M_2).

. . . / . . .

ECOLES NORMALES SUPERIEURES ULM & SEVRES 1977

×3×

6° Soit π la projection de M_2 dans L_1 parallèlement à M_1, et soit G le sous-espace vectoriel de L_1 égal à l'image de M_2 par π.

Montrer que le noyau de la restriction de B_L à M_2 est un sous-espace vectoriel N de M_2 indépendant de L, qu'on précisera.

En déduire qu'il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée b_L sur G telle que quels que soient les vecteurs z et z' de M_2 :

$$B_L(z, z') = b_L(\pi(z), \pi(z')).$$

Exprimer b_L à l'aide de I et de la restriction de $B(L_1, M_1, L)$ à G.

7° Inversement montrer que toute forme bilinéaire symétrique sur M_2 ayant pour noyau l'espace vectoriel N trouvé en 6° est la restriction à M_2 d'une forme B_L pour au moins un $L \in U_{M_1} \cap U_{M_2}$.

Quels sont alors tous les éléments $L' \in U_{M_1} \cap U_{M_2}$ pour lesquels $B_{L'}$ a même restriction à M_2 que B_L ?

II

On munit maintenant $\mathbb{C}^n$ ainsi que ses sous-espaces vectoriels de la norme :

$$z \longmapsto |z| = (z \mid z)^{1/2},$$

et si B est une forme bilinéaire définie sur un tel sous-espace on pose :

$$|B| = \sup |B(z, z')|, (|z| \leqslant 1, |z'| \leqslant 1).$$

Si $M \in \Lambda$, on munit U_M d'une distance d_M par la formule :

$$d_M(F, F') = |B(L, M, F') - B(L, M, F)|$$

où L est un élément fixé de U_M. On observera et on utilisera librement le fait qu'un choix différent de L conduit à une distance équivalente.

1° Soient L_1, L_2, L_3 et M quatre éléments de Λ tels que $L_i \in U_M$ pour $i = 1, 2, 3$. Montrer qu'il existe un isomorphisme ψ qu'on précisera, de L_1 sur L_2, tel que quels que soient les vecteurs z et z' de L_1 :

$$B(L_1, M, L_3)(z, z') = B(L_1, M, L_2)(z, z') + B(L_2, M, L_3)(\psi(z), \psi(z')).$$

2° Soient M_1 et M_2 deux éléments de Λ fixés dans toute la suite. Si $t \longmapsto F(t)$ est une application continue d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans U_{M_1} vérifiant pour tout $t \in [a, b]$: $F(t) \cap M_2 = \{0\}$, comparer les signatures des formes quadratiques associées à $B(M_1, F(a), M_2)$ et $B(M_1, F(b), M_2)$.

3° Soit $t \longmapsto F(t)$ une application continue d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans U_{M_1}, telle que $F(a) \cap M_2 = F(b) \cap M_2 = \{0\}$. On suppose

que pour tout point $u \in]a, b[$ tel que $F(u) \cap M_2 \neq \{0\}$, l'application :

$$t \longmapsto B(F(u), M_1, F(t))$$

est dérivable au point u, et que la dérivée a une restriction à $F(u) \cap M_2$ non dégénérée, de signature $s(u)$. On suppose de plus $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

a. Soit $u \in]a\ b[$ tel que $F(u) \cap M_2 \neq \{0\}$. Montrer que pour tout point $t \neq u$ assez proche de u, $F(t) \cap M_2$ est réduit à $\{0\}$, et exprimer pour un tel t la signature de la forme quadratique associée à $B(M_2, M_1, F(t))$ à l'aide de $s(u)$ et de la signature de la forme quadratique associée à $B(M_2, M_1, F(u))$.

b. Exprimer la signature de la forme quadratique associée à $B(M_1, F(b), M_2)$ à l'aide des entiers $s(u)$ et de la signature de la forme quadratique associée à $B(M_1, F(a), M_2)$.

III

1° On admet que si g est un automorphisme de déterminant positif d'un espace vectoriel réel normé E de dimension finie, il existe une application continue $t \longmapsto \gamma(t)$ de $[0, 1]$ dans le groupe des automorphismes de E vérifiant : $\gamma(0) =$ identité, $\gamma(1) = g$.

Décrire l'ensemble quotient de $U_{M_1} \cap U_{M_2}$ par la relation d'équivalence pour laquelle deux éléments F_0 et F_1 sont équivalents s'il existe une application continue $t \longmapsto F(t)$ d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans U_{M_1} vérifiant pour tout $t \in [a, b]$ $F(t) \cap M_2 = \{0\}$ et telle que $F(a) = F_0$, $F(b) = F_1$. On commencera par déterminer l'ensemble des valeurs prises par la signature de $B(M_1, F, M_2)$ quand F parcourt $U_{M_1} \cap U_{M_2}$.

2° Soient L, M et M' trois éléments quelconques de Λ tels que $L \in U_M \cap U_{M'}$. Montrer qu'il existe un nombre réel positif C tel qu'on ait pour tout $F \in U_M \cap U_{M'}$:

$$|B(L, M, F) - B(L, M', F)| \leqslant C \cdot |B(L, M, F)| \cdot |B(L, M', F)|.$$

Montrer que $U_M \cap U_{M'}$ est un ouvert de l'espace métrique (U_M, d_M). Comparer les topologies définies sur $U_M \cap U_{M'}$ par les distances d_M et $d_{M'}$.

3° Avec les hypothèses de II, 3°, soit M_1' un élément de Λ tel que $U_{M_1'}$ contienne l'image de F. Que peut-on dire de l'application $t \longmapsto B(F(u), M_1', F(t))$ si u vérifie $F(u) \cap M_2 \neq \{0\}$?

Le résultat obtenu en II, 3°, *b* subsiste-t-il si on ne suppose plus $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, les autres hypothèses de II, 3° étant conservées ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail